Chapitre : Signaux périodiques, filtrage

I- Signaux périodiques non sinusoïdaux

1) Spectre d'un signal périodique

Tout signal périodique de fréquence f_s et de forme quelconque peut se reconstituer par la superposition de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de f_s, d'où :

$$s(t) = A_0 \ + \sum A_n cos(2\pi n f_s t + \phi_n) \text{ avec } (A_n, \phi_n) \in R_+ \times R$$

Cette somme est un **développement en série de Fourrier** du signal $s(t)$.

Les $(A_n)_{n\in N}$ (resp. $(\phi_n)_{n\in N}$) permettent de tracer le spectre en amplitude (resp. en phase) du signal.

2) Signification physique

La **composante continue**, A_0, est la valeur moyenne, ainsi : $A_0 = < s \geq \frac{1}{T_0}\int_t^{t+T_0} s(t')dt'$

Le reste du signal, partie variable, est composé de la **composante continue** A_1 et des **harmoniques de rang n.** La fondamentale et les premières harmoniques contiennent la forme générale du signal, les harmoniques de rang élevé, quant à eux, contiennent les détails fins et les discontinuités éventuelles du signal.

II- Action d'un filtre sur un signal périodique non sinusoïdal

1) Filtres

Un **filtre** est un système pour lequel il existe entre $e(t)$ et $s(t)$ une relation de la forme :

$$\sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k s(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k e(t)}{dt^k}$$

avec $(n, m) \in N^2, n \leq m$ et $(a_k)_{0\leq k\leq n}, (b_k)_{0\leq k\leq m} \in R$

m représente **l'ordre d'un filtre**

On obtient $\underline{H}(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k}$

2) Effet d'un filtre sur un signal sinusoïdal

On a $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$, le **gain**, et $\varphi(\omega) = Arg\left(\underline{H}(j\omega)\right)$, la **fonction de phase**, d'où :

$$s(t) = G(\omega)Ecos(\omega t + \varphi_e + \varphi(\omega))$$

3) Diagramme de Bode et type du filtre

Le **diagramme de Bode** est une représentation graphique donnant le gain en décibel ou la courbe de phase, le tout en fonction de $log_{10}(\omega)$.
La **pulsation de coupure**, ω_c, est telle que $G_{dB}(\omega_c) = (G_{dB})_{max} - 3dB$

4) Composition spectrale du signal de sortie

Le contenu spectral de sortie est inclus dans celui du signal d'entrée, en effet les fréquences contenues dans la bande passante sont conservées par le filtre et les autres sont éliminés (atténuées).

5) Caractère intégrateur ou dérivateur d'un filtre

On considère un filtre **intégrateur** si dans la bande atténuée, on a : $\underline{H}(j\omega) \simeq A/j\omega \Leftrightarrow G(\omega) \simeq A/\omega \; et \; \varphi(\omega) \; \simeq -\pi/2$.

D'où la courbe d'amplitude a une pente de $-20 \; dB$ par décade.

On considère un filtre comme **dérivateur** si dans la bande atténuée, on a : : $\underline{H}(j\omega) \simeq Aj\omega \Leftrightarrow G(\omega) \simeq A\omega \; et \; \varphi(\omega) \; \simeq \pi/2$

D'où la courbe d'amplitude a une pente de $+20 \; dB$ par décade.