Chapitre : Equations de Maxwell

I- Loi de la conservation de la charge électrique

L'un des postulats de l'électromagnétisme est la loi de **conversation de la charge électrique** : il n'existe aucun processus créant ou détruisant la charge électrique.
On note l'**équation locale de conversation de la charge électrique** dans le cas général comme :
$\frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t}+div\vec{j}(M,t)=0$ avec ρ la densité volumique de charge et $\vec{j}$ la densité volumique de courant.

Remarque : Cette équation à une forme analogue à l'équation locale de bilan thermique

II- Champ électromagnétique – Equations de Maxwell

1) Définition du champ électromagnétique

Le champ électromagnétique est défini par son action, nommée **force de Lorentz**, sur une charge ponctuelle q. Dans un référentiel $\mathcal{R}$, on définit $\overrightarrow{f_L}$ comme : $\overrightarrow{f_L}=q(\overrightarrow{E_{\mathcal{R}}}(M,t)+\overrightarrow{v_{\mathcal{R}}}(M,t)\wedge\overrightarrow{B_{\mathcal{R}}}(M,t))$.

2) Equations de Maxwell

Les quatre équations de Maxwell que vérifie le champ électromagnétique forment le postulat de base du cours d'électromagnétisme.

Maxwell-Gauss : $div\vec{E}(M,t)=\frac{\rho(M,t)}{\epsilon_0}$

Maxwell-Thompson : $div\vec{B}(M,t)=0$

Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{rot}\vec{E}(M,t)=-\frac{\partial\overrightarrow{B(M,t)}}{\partial t}$

Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{rot}\vec{B}(M,t)=\mu_0\vec{j}(M,t)+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}(M,t)}{\partial t}$

avec ϵ_0 la **permittivité diélectrique** du vide et μ_0 la **perméabilité magnétique** du vide.
Ces deux constantes sont reliées par $\epsilon_0\mu_0c^2=1$;

3) Remarques et commentaires

Les équations de Maxwell sont des **équations linéaires** ainsi le principe de superposition s'applique au champ électromagnétique. A l'aide de l'équations de Maxwell-Faraday (resp. Maxwell-Ampère), on voit que le champ électrique (resp. magnétique) est lié aux variations temporelles du champ magnétique (resp. électrique). Ces deux vecteurs forment alors une **entité indissociable** en régime variable.

4) Compatibilité des équations de Maxwell avec la loi de conservation de la charge

A l'aide des équations de Maxwell (équation de M-A et M-G), on obtient la l'équation locale de conservation de la charge.

$$div\left(\overrightarrow{rot}\vec{B}\right)=div\left(\mu_0\vec{j}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\Leftrightarrow 0=div(\vec{j})+\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

III- Forme intégrale des équations de Maxwell

A l'aide du théorème d'Ostrogradski et du théorème de Stokes on peut obtenir une version intégrale des 4 équations précédentes.

1) Forme intégrale de l'équation de Maxwell-Gauss

Théorème de Gauss : *Soit* $\mathcal{S}$ une surface fermée quelconque. Le flux du champ électrique à travers $\mathcal{S}$ à l'instant t, noté $\Phi_E(t) = \oiint_{M\in\mathcal{S}} \vec{E}(M,t)\cdot\overrightarrow{dS_M}$, est égal à la charge contenue dans $\mathcal{S}$ à cet instant t, notée $Q_{int}(t) = \iiint \rho(M,t)d\tau_M$, divisée par ϵ_0 :

$$\oiint_{M\in\mathcal{S}} \vec{E}(M,t)\cdot\overrightarrow{dS_M} = \frac{\iiint \rho(M,t)d\tau_M}{\epsilon_0}$$

2) Forme intégrale de l'équation de Maxwell-Thompson

Conservation du flux magnétique : Le flux du champ magnétique à travers toute surface fermée est nul à tout instant : $\Phi_B(t) = 0$.
Le champ magnétique est à **flux conservatif**.

3) Forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday

Loi de Faraday : Soit Γ un contour fermé orienté fixe et $\mathcal{S}_\Gamma$ une surface s'appuyant sur Γ dont l'orientation provient de celle de Γ (par la règle de la main droite).
La circulation électrique le long de Γ, notée $\mathcal{C}_E(t) = \oint_{M\in\Gamma} \vec{E}(M,t)\cdot\overrightarrow{dl_M}$, est égale à moins la dérivée par rapport au temp du flux du champ magnétique à travers $\mathcal{S}_\Gamma$, notée $\Phi_B(t) = \oiint_{M\in\mathcal{S}_\Gamma} \vec{B}(M,t)\cdot\overrightarrow{dS_M}$

$$\oint_{M\in\Gamma} \vec{E}(M,t)\cdot\overrightarrow{dl_M} = -\frac{d\oiint_{M\in\mathcal{S}_\Gamma} \vec{B}(M,t)\cdot\overrightarrow{dS_M}}{dt}$$

4) Forme intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère

Théorème d'Ampère généralisé : Soit Γ un contour fermé orienté fixe et $\mathcal{S}_\Gamma$ une surface s'appuyant sur Γ dont l'orientation provient de celle de Γ (par la règle de la main droite).
La circulation du champ magnétique le long de Γ, notée $\mathcal{C}_B(t) = \oint_{M\in\Gamma} \vec{B}(M,t)\cdot\overrightarrow{dl_M}$, est liée à l'intensité traversant $\mathcal{S}_\Gamma$, notée $I_{\mathcal{S}_T}(t) = \iint_{M\in\mathcal{S}_\Gamma} \vec{j}(M,t)\cdot\overrightarrow{dS_M}$, et au flux électrique à travers $\mathcal{S}_\Gamma$, notée $\Phi_E(t) = \oiint_{M\in\mathcal{S}_\Gamma} \vec{E}(M,t)\cdot\overrightarrow{dS_M}$, par la relation :

$$\mathcal{C}_B(t) = \mu_0 I_{\mathcal{S}_\Gamma}(t) + \epsilon_0\mu_0\frac{d\Phi_E(t)}{dt}$$

IV- Equation de propagation des champs dans un milieu vide de charge et de courant

1) Couplage spatio-temporel entre le champ électrique et la charge magnétique

Le double couplage entre les variations spatiales de chaque champ et les variations temporelles de l'autre champ présent dans les équations Maxwell est à l'origine du phénomène de propagation du champ électromagnétique.

2) Démonstration de l'équation de propagation

On se place dans une région où il n'y a ni charges ni courants, les équations de Maxwell s'écrivent alors :

Maxwell-Gauss : $div\vec{E}(M,t) = 0$
Maxwell-Thompson : $div\vec{B}(M,t) = 0$

Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{rot}\vec{E}(M,t) = -\frac{\partial \overrightarrow{B(M,t)}}{\partial t}$

Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{rot}\vec{B}(M,t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t}$

Dans cette région on peut appliquer les **équations de d'Alembert** au champ électrique et électromagnétique, celles-ci s'écrivent ainsi : $\Delta\vec{B}(M,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}(M,t)$; $\Delta\vec{E}(M,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}(M,t)$

3) Nature de l'onde lumineuse

La théorie de Maxwell a permis de découvrir la nature de l'onde lumineuse : onde électromagnétique se propageant dans le vide à la vitesse $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$.

V- Champs statiques

1) Equations de Maxwell en régime stationnaire

Dans le cas du régime stationnaire, où aucun champ ne dépend du temps, les équations de Maxwell deviennent :

Maxwell-Gauss : $div\vec{E}(M) = \frac{\rho(M,t)}{\epsilon_0}$

Maxwell-Thompson : $div\vec{B}(M) = 0$

Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{rot}\vec{E}(M) = 0$

Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{rot}\vec{B}(M) = \mu_0 \vec{j}(M)$

2) Existence d'un potentiel électrostatique

D'après l'équation de Maxwell-Faraday, le champ électrostatique est à rotationnel nul ainsi le champ est à circulation conservative.
La propriété $\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0}$ est équivalente à l'existence d'un potentiel V tel que $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M)$.

3) Equation de Poisson et équation de Laplace de l'électrostatique

En régime stationnaire, le potentiel électrique vérifie l'**équation de Poisson** : $\Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} = 0$; dans une zone vide de charge cette équation devient l'**équation de Laplace** : $\Delta V(M) = 0$.