Chapitre : Champ électrostatique

I- Charge électrique

I) Rappels

La charge est additive, quantifiée et la charge d'un système isolé se conserve au cours du temps.

II) Charges ponctuelles

La notion de charge s'applique à une particule dont l'extension spatiale est négligeable devant les distances entre particules, on parle de **charge ponctuelle**.
On se placera à l'échelle mésoscopique, de ce fait le nombre de particule dans un volume élémentaire est suffisamment important (de l'ordre de 10^{10}) et sa fluctuation suffisamment faible pour que la notion de valeur moyenne ait un sens et que la **charge électrique** soit considérée comme une grandeur continue.

III) Distributions continues de charges

Dans un volume élémentaire $d\tau_P$ autour du point P, il y a une charge totale dQ_P ainsi on définit la **densité volumique de charge** comme : $dQ_P = \rho(P)d\tau_P$; d'où la charge totale contenue dans un volume V est : $Q = \iiint_{P\in V} \rho(P)d\tau_P$.

Dans le cas où une des dimensions caractéristiques e de la distribution de charge sera très petite devant les deux autres, on pourra passer par une modélisation surfacique et notée $\sigma(P)$ la **densité surfacique de charge** autour du point P comme : $dQ_P = \sigma(P)dS_p$.
Dans le cas où deux des dimensions caractéristiques de la distribution seront très petite devant l'une (exemple : un fil infini), on pourra passer par une modélisation linéique et notée $\lambda(P)$ la **densité linéique de charge** autour du point P comme : $dQ_P = \lambda(P)l_P$.

Attention : Dans les deux derniers cas, cette modélisation crée des discontinuités artificielles de charge au niveau de la surface (resp. du fil). Il faudra alors réintroduire au niveau local une densité volumique de charge ρ sur une faible épaisseur pour résoudre ce problème.

II- Champ crée par une charge ponctuelle

I) Loi de Coulomb

D'après la loi de Coulomb, la force (force de Coulomb) que subit la charge q_M placée au point M est centrale, décroît en $\frac{1}{r^2}$ et tel que :

$$\overrightarrow{F_{A\to M}} = \frac{q_A q_M}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{u_{AM}}}{||\overrightarrow{AM}||^2}$$

avec $\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12} F.m^{-1}$, la **permittivité du vide**.

II) Champ électrostatique crée par une charge ponctuelle

Le **champ électrostatique** créé en M par q_A est définit comme : $\overrightarrow{E_A}(M) = \frac{\overrightarrow{F_{A\to M}}}{q_M}$ d'où :

$$\overrightarrow{E_A}(M) = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{u_{AM}}}{||\overrightarrow{AM}||^2}$$

On définit une **ligne de champ** comme la courbe tangente en chacun de ses points au champ $\vec{E}$, orienté dans son sens.

III- Champ crée par une distribution de charges

I) Principe de superposition

Etant donné qu'il y a indépendance de l'interaction de deux (ou plus) particules chargées, vis-à-vis de la présence ou non d'autres charges, on peut appliquer le **principe de superposition**. Ce qui revient à sommer les effets de chaque particule chargée.

II) Champ crée par une distribution discrète de charges ponctuelles

Dans le cas d'une distribution discrète de charges ponctuelles q_i placée en A_i, on a par principe de superposition que :

$$\vec{E}(M) = \sum_i \overrightarrow{E_{A_i}}(M) = \sum_i \frac{q_{A_i}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{u_{A_iM}}}{||\overrightarrow{A_iM}||^2}$$

III) Champ créé par une distribution continue de charges

Dans le cas d'une distribution de charges $\mathcal{D}$ continue contenue dans $\mathcal{V}$, chaque élément du volume mésoscopique est assimilable à une charge ponctuelle et crée en M le champ :

$$d\overrightarrow{E_P} = \frac{dq_P}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{u_{PM}}}{||\overrightarrow{PM}||^2} = \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{u_{PM}}}{||\overrightarrow{PM}||^2} d\tau_P$$

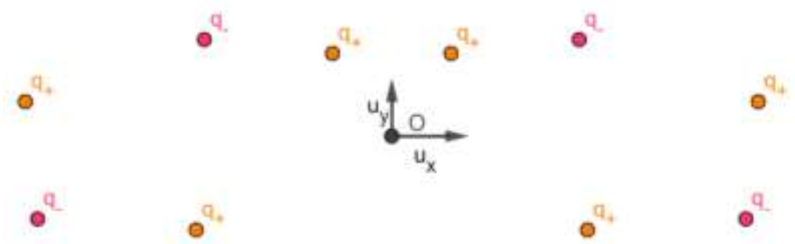
Le champ électrique crée par $\mathcal{D}$ en M est alors :

$$\vec{E}(M) = \iiint_{P\in\mathcal{V}} \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{u_{PM}}}{||\overrightarrow{PM}||^2} d\tau_P$$

IV- Propriétés de symétrie

I) Symétries usuelles des distributions de charges

La plupart du temps, on peut trouver des plans de symétries pour la distribution de charge.



On dit que la **distribution de charges $\mathcal{D}$ est symétrique** par rapport au plan Π si et seulement si : $\forall M \in \mathcal{D}, M' = \mathcal{S}_\Pi(M) \in \mathcal{D}$ et $\rho(M) = \rho(M')$

Dans l'exemple, la distribution de charge est symétrique par rapport au plan $\Pi = (O, u_y, u_z)$.

On dit que la **distribution de charge $\mathcal{D}$ est antisymétrique** par rapport au plan Π si et seulement si : $\forall M \in \mathcal{D}, M' = \mathcal{S}_\Pi(M) \in \mathcal{D}$ et $\rho(M) = -\rho(M')$.

Dans l'exemple, la distribution de charge est antisymétrique par rapport au plan $\Pi = (0, u_y, u_z)$.

On dit que la **distribution de charge $\mathcal{D}$ est invariante par translation** par rapport au vecteur $\vec{a}$ si et seulement si $\forall M \in \mathcal{D}, M' = \mathcal{T}_{\vec{a}}(M) \in \mathcal{D}$ et $\rho(M) = \rho(M')$.

Exemple : fil en cuivre infini uniformément chargé

On dit que la **distribution de charge $\mathcal{D}$ est invariante par rotation** autour de l'axe Δ si et seulement si $\forall M \in \mathcal{D}, M' = R_\Delta(M) \in \mathcal{D}$ et $\rho(M) = \rho(M')$.

Exemple : Cylindre d'axe de révolution (Oz) uniformément chargé, la distribution de charge est invariante par rotation autour de (Oz).

II) Symétries du champ

D'après le **principe de Curie**, les éléments de symétrie des causes se retrouvent dans les effets.
D'où si la distribution de charge est invariante par translation selon $\vec{a}$ (resp. rotation autour de Δ) alors le champ électrique est invariant selon $\vec{a}$ par translation (resp. rotation autour de Δ).
De même, si la distribution de charges est symétrique (resp. antisymétrique) par rapport à Π alors le champ électrique est symétrique (resp. antisymétrique) par rapport à Π.

V- Circulation du champ électrostatique, potentiel électrostatique

I) Circulation d'un champ de vecteurs

Le **potentiel électrostatique** est une grandeur physique se définissant à partir de l'intégrale du champ électrostatique le long d'un chemin.

On définit la **circulation élémentaire** du champ $\vec{a}(M)$ dans un déplacement $\overrightarrow{dl_M}$ par :
$d\mathcal{C} = \vec{a}(M) \cdot \overrightarrow{dl_M}$

Tandis que la **circulation** du champ $\vec{a}(M)$ le long du chemin Γ est : $\mathcal{C} = \int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{a}(M) \cdot \overrightarrow{dl_M}$.

II) Lien entre le champ et le potentiel électrostatiques

On définit : $\mathcal{C}_{M \to N} = \int_M^N \vec{E}(P) \cdot \overrightarrow{dl_P} = V(M) - V(N)$; d'où :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}(V(M))$$

III) Energie potentielle d'une charge placée dans un champ extérieur

Le potentiel électrostatique est l'**énergie potentielle par unité de charge**, d'où l'énergie potentielle d'une charge ponctuelle q soumise à la force exercée par le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est :

$$E_p(M) = qV(M)$$

VI- Flux du champ électrostatique – Théorème de Gauss

I) Flux d'un champ de vecteurs

Soit $\vec{a}(M)$ un champ de vecteur et $\overrightarrow{dS_M}$ une surface élémentaire autour d'un point M. On définit alors le **flux élémentaire** $d\Phi_a = \vec{a}(M) \cdot \overrightarrow{dS_M}$.

Et le **flux** de $\vec{a}$ à travers la surface orienté $\mathcal{S}$ est :

$$\iint_{M \in \mathcal{S}} \vec{a}(M) \cdot \overrightarrow{dS_M}$$

II) Théorème de Gauss

On définit alors le **théorème de Gauss** du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers une surface fermée quelconque $\mathcal{S}$ est reliée à la somme des charges par :

$$\iint_{M \in \mathcal{S}} \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{dS_M} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

VII- Topographie du champ électrostatique

I) Lignes de champ et équipotentielles

Les **lignes de champs** du champ électrostatique sont par définition des lignes tangentes en chaque point du champ électrostatique.

Les **équipotentiels** sont des surfaces sur lesquelles le potentiel électrostatique à une même valeur.

II) Propriétés des lignes de champ électrostatique et des équipotentielles

Etant donné qu'on a $d\mathcal{C} = -dV$, les lignes de champ électrostatique sont orientées dans le sens des potentiels décroissants et ne se referment jamais sur elles-mêmes.
De plus le potentiel n'admet pas d'extremum en dehors des charges.
Les équipotentiels sont quant à elles orthogonales aux lignes de champ.