Chapitre : Mécanique du solide

I- Repérage d'un solide

1) Définition d'un solide

Un **solide** est un système matériel dont les points restent à distance constante les uns des autres.

2) Référentiel barycentrique

Un **référentiel barycentrique** (ou référentiel du centre de masse) est composé d'une horloge et d'un repère lié au centre de masse G et à trois directions fixes.

II- Mouvement de translation

1) Définition

Un solide est en **translation** lorsque les directions liées au référentiel barycentrique sont fixes par rapport au référentiel d'étude.

2) Mouvement d'un point d'un solide en translation

Etant donné que les directions du repère lié au solide sont fixes dans le référentiel d'étude et qu'un point quelconque du solide est fixé au solide, Le mouvement suivi par un point quelconque d'un solide en translation est alors **identique** à celui du centre de masse G (ou à un autre point du solide).

3) Conséquences

Ainsi, tous les points d'un solide en translation ont le même mouvement. Le mouvement d'un solide en translation pouvant être complètement décrit par le mouvement d'un de ses points.

III- Solides en rotation autour d'un axe fixe

1) Définition

Un solide est en **rotation autour d'un axe Δ fixe** dans $\mathcal{R}$, s'il existe une unique droite Δ immobile à la fois par rapport au solide et au référentiel $\mathcal{R}$.

2) Mouvement d'un point d'un solide en rotation

Le mouvement d'un pont P lié à un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ est un mouvement circulaire situé dans le plan perpendiculaire à Δ contenant P. La trajectoire est caractérisée par :

son centre H, projeté orthogonale P sur l'axe Δ
son rayon r, distance minimale de P à l'axe Δ
sa vitesse angulaire $\dot{\theta}$ égale à la vitesse de rotation du solide autour de Δ

Dans le système de coordonnées cylindriques d'origine H et d'axe Δ, la vitesse instantanée de P est $\overrightarrow{v_{P\backslash\mathcal{R}}} = r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$.

3) Conséquences

Le déplacement angulaire infinitésimal $d\theta$, la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et l'accélération $\ddot{\theta}$ sont identiques pour chacun des points du solide donc : cela a un sens de parler de rotation et de vitesse de rotation du solide ; le **mouvement du solide est parfaitement défini par la donnée du déplacement angulaire d'un de ses points**.

IV- Moment cinétique d'un solide ou d'un système de points

1) Notion de moment d'inertie

Le **moment d'inertie** est une grandeur physique caractérisant la répartition de la matière au sein d'un solide en $kg.m^{-2}$; il quantifie aussi la résistance du solide à être mis en rotation.

Dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ, le moment d'inertie s'écrit : $J_\Delta = \iiint_S HM^2 dm$ avec H le projeté orthogonale de M sur Δ.

De plus le moment d'inertie est lié au **moment cinétique** par rapport à Δ par : $L_\Delta = J_\Delta \dot{\theta}$

2) Cas d'un système déformable

Dans le cas d'un système constitué de plusieurs points matériels M_i de masse m_i de moments cinétiques par rapport à l'axe orienté Δ : $L_\Delta(M_i)$. Le moment cinétique du système est obtenu par sommation des moments cinétiques de chacun des points : $L_\Delta = \sum_i L_\Delta(M_i)$.

De même, le moment d'inertie d'un solide par rapport à l'axe orienté Δ est défini par la somme des moemtns d'inertie par rapport à Δ de chacun de ses points le constituant : $J_\Delta = \sum_i J_\Delta(M_i)$.

V- Loi du moment cinétique pour un solide en rotation

1) Loi scalaire du moment cinétique pour un solide

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, la dérivée temporelle du moment cinétique du solide par rapport à son axe de rotation fixe Δ est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport à ce même axe : $\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_i(\vec{f_i}) \Leftrightarrow \frac{dJ_\Delta\dot{\theta}}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_i(\vec{f_i})$.

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à l'axe Δ est sa **caractéristique intrinsèque** qui mesure son aptitude à s'opposer aux variations de sa vitesse de rotation autour de cet axe.

2) Cas de conservation du moment cinétique

Le moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est conservé si la somme des moments de forces extérieures qui lui sont appliquées est nulle.

Dans le cas d'un solide en rotation à l'équilibre, sa vitesse angulaire est nulle à tout instant d'où : $\sum_i \mathcal{M}_i(\vec{f_i}) = 0$.

3) Couples

Un **couple** est un ensemble de force dont la résultante est nulle : $\sum_i \vec{f_i} = \vec{0}$; mais dont le moment par rapport à un axe fixe Δ est non nul : $\sum_i \mathcal{M}_i(\vec{f_i}) \neq 0$.

Couple de torsion : Soit un fil cylindrique métallique d'axe Δ dont la section supérieure est fixe et auquel on attache une barre AB. On applique un couple de forces $(\vec{f_A}, \vec{f_B})$ de norme f aux extrémités de A et B de la barre. Le moment du couple par rapport aux forces est : $\Gamma_1 = f \times AB$ et conduit le fil à se tordre selon un angle α, nommée **angle de torsion**. D'après la loi du moment

cinétique, le fil exerce sur la barre, à l'équilibre, un **couple de torsion**, Γ, tel que : $\Gamma_1 = \Gamma$.
Dans le domaine d'élasticité du métal, le moment Γ du couple de torsion exercé par un fil métallique est proportionnel à l'angle de torsion α tel que : $\Gamma = C\alpha$ avec C la **constante de torsion** du fil.

Couple moteur : On considère un solide en rotation autour d'un axe orienté Δ auquel on applique un couple de moment par rapport à Δ égal à Γ. Ainsi d'après la loi du moment cinétique : $J_\Delta \ddot{\theta} = \Gamma$.

On en déduit que si Γ et $\dot{\theta}$ ont le même signe, le couple est un **couple moteur** ; sinon c'est un **couple de freinage**.

VI- Application aux dispositifs rotatifs

1) Liaison pivot d'axe Δ

Dans un dispositif où un solide indéformable, nommé **rotor**, est en rotation autour d'un axe fixe par rapport à un solide immobile, **stator**, la liaison pivot a pour but de restreindre les possibilités de mouvement du rotor par rapport au stator.

On se restreindra à l'étude de la **liaison pivot parfaite** qui assure un guidage parfait de la rotation autour de l'axe Δ et bloque toute translation le long de Δ. L'action de liaison d'une liaison pivot idéale d'axe Δ a un moment par rapport à Δ nul : $\mathcal{M}_\Delta(liaison) = 0$.

VII- Energie d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

1) Energie cinétique d'un solide en rotation

Un solide de moment d'inertie J_Δ en rotation autour d'axe fixe Δ à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ possède l'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2$

2) Puissance d'une force appliquée à un solide en rotation

La puissance d'une force $\vec{f}$ appliquée en un point M_i d'un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ est égale au produit du moment de cette force par rapport à l'axe Δ par la vitesse angulaire de rotation du solide autour de cet axe : $P(\vec{f}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{f})\dot{\theta}$

3) Loi de l'énergie cinétique pour un solide indéformable

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe Δ, est égale à la puissance de l'ensemble des forces extérieures $\vec{f_i}$ qu'on lui applique : $\frac{dE_c}{dt} = \sum_i P(\vec{f_i}) = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{f_i})\,\dot{\theta}$