Chapitre : Energie du champ électromagnétique

I- Interaction entre le champ électrique et la matière

1) Densité volumique de force électromagnétique

On définit la **densité volumique de force électromagnétique** $\overrightarrow{f_v}$ telle que :
$\overrightarrow{f_v}(M,t) = \rho(M,t)\vec{E}(M,t) + \vec{j}(M,t) \wedge \vec{B}(M,t)$ avec $\rho = nq$ la contribution des porteurs de charge q à a la densité volumique de charge et n le nombre de porteurs de charge q par unité de volume.
D'où la force électromagnétique s'exerçant sur les charges contenues dans un volume élémentaire $d\tau_M$ autour de M est : $d\vec{F} = \overrightarrow{f_v} d\tau_M$

2) Puissance volumique

La puissance volumique cédée par le champ électromagnétique à la matière $\mathcal{P}_V$ est telle que :
$\mathcal{P}_V(M,t) = \vec{j}(M,t) \cdot \vec{E}(M,t)$
Et la puissance cédée à un volume élémentaire $d\tau_M$ autour du point M est : $dP = \mathcal{P}_V(M,t) d\tau_M$

3) Cas d'un conducteur ohmique

On définit un **conducteur** comme un corps à l'intérieur duquel il existe des porteurs de charge pouvant se déplacer librement.
Dans un conducteur, on peut appliquer la **loi d'Ohm locale** qui relie la densité de courant $\vec{j}(M,t)$ au champ électrique local $\vec{E}(M,t)$ par : $\vec{j}(M,t) = \gamma\vec{E}(M,t)$ avec γ la **conductivité** en $\Omega^{-1}.m^{-1}$.
Cette loi est une loi phénoménologique.

Ainsi, la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique à l'intérieur d'un conducteur ohmique est : $\mathcal{P}_V(M,t) = \frac{j^2(M,t)}{\gamma} = \gamma E^2(M,t) > 0$.
Le champ fournit de l'énergie au conducteur, c'est l'**effet Joule**.

II- Densité volumique d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting

1) Définitions

On définira l'**énergie électromagnétique,** notée U_{em}, comme l'énergie du champ électromagnétique.
La répartition de l'énergie électromagnétique dans l'espace est donnée par la **densité volumique d'énergie électromagnétique**, notée u_{em}, telle que l'énergie électromagnétique contenue dans un volume $d\tau_M$ autour d'un point M à l'instant t est : $dU_{em} = u_{em} d\tau_M$
Cette énergie est susceptible de se déplacer, on décrira alors le déplacement de l'énergie par le **vecteur de Poynting**, notée $\vec{\Pi}$, tel que l'énergie électromagnétique traversant la surface dS_M autour du point M entre les instants t et $t + dt$ est : $d^2U_{em} = \vec{\Pi}(M,t) \cdot \overrightarrow{dS_M} dt$
Ainsi $[U_{em}] = J$;$[u_{em}] = J.m^{-3}$ et $[\Pi] = V.A.m^{-2}$

2) Expressions

La **densité volumique de courant électromagnétique** u_{em} est donnée par :
$$u_{em}(M,t) = \frac{\epsilon_0 E^2(M,t)}{2} + \frac{1}{2\mu_0} B^2(M,t)$$
et le **vecteur de Poynting** $\vec{\Pi}$ par : $\vec{\Pi}(M,t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(M,t) \wedge \vec{B}(M,t)$

III- Bilan d'énergie électromagnétique

1) Bilan global

Soit $\mathcal{S}$ une surface de contrôle fermée et fixe et $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$ le volume délimité par $\mathcal{S}$. L'énergie électromagnétique U_{em} contenue à l'intérieur peut varier pour deux raisons : l'énergie électromagnétique se déplace et travers la surface de contrôle $\mathcal{S}$; et il y a une perte d'énergie électromagnétique à l'intérieur de $\mathcal{S}$.
La puissance électromagnétique traversant $\mathcal{S}$ vers l'extérieur, notée $\mathcal{P}_{sortant}$, est telle que :
$\mathcal{P}_{sortant} = \oiint_{P\in\mathcal{S}} \overrightarrow{\Pi(P,t)} \cdot \overrightarrow{dS_P}$; et la puissance perdue par le champ électromagnétique à l'intérieur de $\mathcal{S}$, notée $\mathcal{P}_{perdue}$, est celle qu'il donne aux charges et est telle que :
$\mathcal{P}_{perdue} = \iiint_{M\in V_{\mathcal{S}}} P_v(M,t) d\tau_M$
Ainsi le **bilan d'énergie électromagnétique** pour une surface de contrôle fermée $\mathcal{S}$ est :

$$\frac{dU_{em}}{dt} + \mathcal{P}_{sortant} = -\mathcal{P}_{perdue}$$

2) Equation locale de Poynting

A l'aide du théorème d'Ostrogradski et du bilan d'énergie électromagnétique, on obtient l'**équation locale de Poynting** : $\frac{\partial u_{em}}{\partial t}(M,t) + div\vec{\Pi}(M,t) = -(\vec{j}\cdot\vec{E})(M,t)$
Le teme $\frac{\partial u_{em}}{\partial t}$ traduit la variation de la quantité d'énergie présente, c'est le **terme de stockage** ; tandis que $div\vec{\Pi}$ correspond au déplacement de l'énergie, c'est le **terme de transfert** ; et le terme $(\vec{j}\cdot\vec{E})$ correspond à la production (ou consommation) locale d'énergie, c'est le **terme de production**.